www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

PARTIE I

1°) Soient I un intervalle ouvert et $x_0 \in I$. Soit $f : I - \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞; on note $f^{(p)}$ sa dérivée p-ième. On suppose, que pour tout $p \geq 0$, $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f^{(p)}(x)$ existe.

Montrer que f se prolonge par continuité en une fonction $\bar{f} : I \to \mathbb{R}$ qui est de classe C^∞.

2°) Soit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\alpha(x) = 0$ si $|x| \geq 1$ et $\alpha(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}}$ si $|x| < 1$; montrer que α est C^∞; quelle est l'allure du graphe de $\beta(x) = \int_{-1}^{x} \alpha(t)\, dt$? Construire une fonction $\omega : \mathbb{R} \to [0,1]$ de classe C^∞ telle que $\omega(x) = 0$ si $|x| \geq 1$ et $\omega(x) = 1$ si $|x| \leq \frac{1}{2}$.

3°) Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels; montrer qu'on peut choisir une suite strictement croissante d'entiers k_n de sorte que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega(k_n x) \frac{x^n}{n!}$ soit uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Montrer qu'on peut choisir la suite k_n de sorte que $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega(k_n x) \frac{x^n}{n!}$ soit de classe C^∞ et que $\varphi^{(p)}(0) = a_p$ pour tout $p \geq 0$.

4°) Soit $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ telle que $f(x) = x^p \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$.

Est-ce que $f^{(p)}(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$? *(On justifiera la réponse par une démonstration ou un contre-exemple).*

5°) Soit $f :]-a,a[\to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ paire. Soit $h :]0,a^2[\to \mathbb{R}$ la fonction C^∞ définie par $h(y) = f(\sqrt{y})$; utiliser la forme de la relation entre $h^{(p)}(y)$ et les dérivées de f pour montrer que si $f(x) = x^{2n}\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ alors, pour $p \leq n$, $h^{(p)}(y) \xrightarrow[y \to 0^+]{} 0$. Montrer qu'il existe une fonction $g :]-a^2,a^2[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que, pour tout $x \in]-a,a[$, on ait $f(x) = g(x^2)$.

6°) Soit $f :]-a,a[\to \mathbb{R}$ une fonction C^∞. Montrer l'existence de deux fonctions C^∞ u et $v :]-a^2,a^2[\to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in]-a,a[, \quad f(x) = xu(x^2) + v(x^2).$$

PARTIE II

Dans cette partie, on considère des fonctions de classe C^∞ définies sur un voisinage ouvert de l'origine O dans $\mathbb{R}^2$. I, J, I', J'... désigneront des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ contenant 0.

1°) Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞. Si, pour tout $x \in I$, on a $f(x,0) = 0$, montrer qu'il existe une fonction $g : I \times J \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que :

$$\forall (x,y) \in I \times J, \quad f(x,y) = y\, g(x,y).$$

(On appliquera une formule de Taylor avec reste intégral).

On suppose que, pour tout $x \in I$, on a $(x, -3x^2) \in I \times J$.

Si, pour tout $x \in I$, on a $f(x, -3x^2) = 0$, montrer qu'il existe $g : I \times J \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que :

$$\forall (x,y) \in I \times J, \quad f(x,y) = (3x^2 + y)\, g(x,y).$$

2°) On dit que $f : I \times J \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifie la propriété (A) s'il existe $\alpha : I \times J \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ avec $\alpha(0,0) = 1$ et

$$\forall (x,y) \in I \times J, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (3x^2 + y)\, \alpha(x,y).$$

Que valent alors $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$?

On suppose que f vérifie la propriété (A). Ecrire un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(x, -3x^2)$.

Montrer qu'il existe deux intervalles $I' \subset I$, $J' \subset J$ et deux fonctions a et $b : J' \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ avec $a(0) = 1$, $a(y) > 0$ pour $y \in J'$, ayant la propriété suivante :

si $f_1 : I' \times J' \to \mathbb{R}$ est la fonction C^∞ définie par $f_1(x,y) = \frac{f(x,y) - b(y)}{a(y)}$, alors on a

$$\forall x \in I', \quad f_1(x, -3x^2) = -2x^3.$$

Montrer que f_1 vérifie la propriété (A).

Montrer qu'il existe $\beta : I' \times J' \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que :

$$\forall (x,y) \in I' \times J', \quad f_1(x,y) = x^3 + xy + (3x^2 + y)\, \beta(x,y).$$

Utiliser la propriété (A) pour voir qu'il existe une fonction $\gamma : I' \times J' \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que :

$$\forall (x,y) \in I' \times J', \quad f_1(x,y) = x^3 + xy + (3x^2 + y)^2 \gamma(x,y).$$

Tournez la page S.V.P.

3°) Soit $H : I' \times J' \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction C^∞ définie par :

$$H(x, y, z) = z[1 + 3xz + (3x^2 + y)z^2] - \gamma(x, y).$$

Calculer $\frac{\partial H}{\partial z}(0, 0, z_0)$; montrer qu'il existe $h : I'' \times J'' \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ (avec $I'' \times J'' \subset I' \times J'$) telle que :

$$\forall (x, y) \in I'' \times J'', \quad h(x, y)[1 + 3xh(x, y) + (3x^2 + y)(h(x, y))^2] = \gamma(x, y).$$

Soit $X(x, y) = x + (3x^2 + y)h(x, y)$. Calculer $(X(x, y))^3 + yX(x, y)$.

4°) On dit que $f : I \times J \to \mathbb{R}$ et $\bar{f} : \bar{I} \times \bar{J} \to \mathbb{R}$ sont *équivalentes* au voisinage de l'origine s'il existe des intervalles $I_0 \subset I$, $J_0 \subset J$ et une application $\varphi : I_0 \times J_0 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ laissant l'origine fixe, de la forme $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(y))$, qui soit un difféomorphisme de $I_0 \times J_0$ sur l'ouvert $\varphi(I_0 \times J_0) \subset \bar{I} \times \bar{J}$ et telle que :

$$\forall (x, y) \in I_0 \times J_0, \quad f(x, y) = (\bar{f} \circ \varphi)(x, y).$$

On dit que l'équivalence est *stricte* si $\varphi_2(y) = y$. *(On ne demande pas de vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence).*

Soit $g : I \times J \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ avec $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$.

Montrer qu'il existe des intervalles $I_0 \subset I$, $J_0 \subset J$ et une fonction $p : J_0 \to I_0$ de classe C^∞ avec $p(0) = 0$, tels que :

$$\forall y \in J_0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(p(y), y) = 0$$

Montrer qu'il existe deux fonctions $q : I_0 \times J_0 \to \mathbb{R}$ et $r : J_0 \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telles que :

$$\forall (x, y) \in I_0 \times J_0, \quad g(x, y) = (x - p(y))^2 q(x, y) + r(y)$$

(On appliquera une formule de Taylor avec reste intégral).

Que dire de $q(0, 0)$?

Montrer que g est strictement équivalente au voisinage de l'origine à $g_0(x, y) = Ax^2 + r(y)$ où $A \neq 0$.

5°) Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, vérifiant la condition (B) :

(B) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) = 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$.

Montrer que f est équivalente au voisinage de l'origine à une fonction $\bar{f}$ vérifiant (A). *(On pourra appliquer* II-4° *à* $g(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$*).*

Montrer qu'il existe $k : \bar{J} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que f est équivalente au voisinage de l'origine à la fonction $\tilde{f}(x, y) = x^3 + xy + k(y)$.

PARTIE III

Dans cette partie, on considère des applications $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ où Ω est un voisinage ouvert de l'origine O dans $\mathbb{R}^2$ et où F laisse l'origine fixe : $F(O) = O$.
On dit que $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ et $G : \Omega' \to \mathbb{R}^2$ sont *équivalentes au voisinage de l'origine* s'il existe :

- un ouvert Ω_0' avec $O \in \Omega_0' \subset \Omega'$,
- une application $\varphi : \Omega_0' \to \mathbb{R}^2$ de classe C^∞, difféomorphisme de Ω_0' sur l'ouvert $\varphi(\Omega_0') \subset \Omega$ avec $\varphi(O) = O$,
- un ouvert Ω_0 contenant $G(\Omega_0')$,
- une application $\psi : \Omega_0 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^∞, difféomorphisme de Ω_0 sur l'ouvert $\psi(\Omega_0)$ avec $\psi(O) = O$

tels que :

$$\forall z \in \Omega_0', \quad (F \circ \varphi)(z) = (\psi \circ G)(z).$$

(On ne demande pas de vérifier que c'est une relation d'équivalence).

On note $J_F(z)$ le déterminant de l'application linéaire tangente $F'(z)$. On s'intéresse aux applications $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ comme ci-dessus et vérifiant la propriété (C) : $J_F(O) = 0$ et $J_F'(O)$ non nulle ($J_F'(O)$ est l'application linéaire tangente à J_F en O).

1°) Montrer que, si F est équivalente au voisinage de O à G et si F vérifie (C), alors G vérifie (C). Montrer que, si F vérifie (C), alors $F'(O)$ est de rang 1 et que, si $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est l'application linéaire $u(x, y) = (0, y)$, il existe deux isomorphismes linéaires

$$\varphi_0, \psi_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ avec } F'(O) \circ \varphi_0 = \psi_0 \circ u.$$

Montrer que F vérifiant (C) est équivalente au voisinage de O à une application de la forme $(x, y) \mapsto (f(x, y), y)$. Que dire des dérivées partielles de f en O ?

2°) Si F vérifie (C), $J_F^{-1}(0)$ est une courbe au voisinage de l'origine. Si $\gamma :]-a, a[\to \Omega$ est un paramétrage local de $J_F^{-1}(0)$ avec $\gamma(0) = O$, on considère les conditions :

(D1) $(F \circ \gamma)'(0) \neq O$

(D2) $(F \circ \gamma)'(0) = O$ et $(F \circ \gamma)''(0) \neq O$

Montrer que ces conditions sont ou ne sont pas vérifiées, indépendamment du choix de γ; vérifier que, si F et G sont équivalentes au voisinage de O, si F vérifie (C) et (D1), ou (C) et (D2), alors G vérifie les mêmes propriétés respectivement.

On dit que F présente un *pli* en O si (C) et (D1) sont vérifiées.
On dit que F présente une *fronce* en O si (C) et (D2) sont vérifiées.

3°) Montrer que si F présente un pli en O, alors F est équivalente au voisinage de O à

$$P(x, y) = (x^2, y).$$

4°) Montrer que si F présente une fronce en O, alors F est équivalente au voisinage de O à $F_0(x, y) = (f_0(x, y), y)$, où f_0 vérifie la condition (B) de II-5°. En déduire que si F présente une fronce en O, alors F est équivalente au voisinage de O à

$$Q(x, y) = (x^3 + xy, y).$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail